Mathématiques : applications et interprétation
Niveau supérieur
Épreuve 3

9 mai 2023

Zone A après-midi | **Zone B** matin | **Zone C** après-midi

1 heure

Instructions destinées aux candidats

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Répondez à toutes les questions sur le livret de réponses prévu à cet effet.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour le cours de mathématiques : applications et interprétation** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[55 points]**.

2223 – 7218

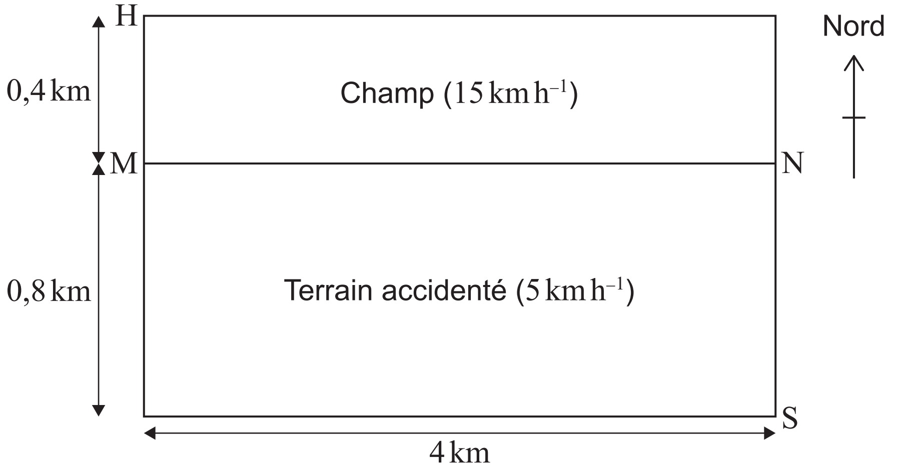
Répondez aux **deux** questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. Les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

1. [Note maximale : 26]

Cette question considère l'itinéraire optimal entre deux points, séparés par plusieurs régions où il est possible de se déplacer à différentes vitesses.

Huw demeure dans une maison, H, et il fréquente une école, S. H et S sont indiqués sur le diagramme suivant. L'école est située $1{,}2\,\mathrm{km}$ au sud et $4\,\mathrm{km}$ à l'est de la maison de Huw. La limite $[\mathrm{MN}]$, allant d'ouest en est, se trouve $0{,}4\,\mathrm{km}$ au sud de sa maison. Le terrain au nord de $[\mathrm{MN}]$ est un champ dans lequel Huw court à 15 kilomètres à l'heure ($\mathrm{km\,h^{-1}}$). Le terrain au sud de $[\mathrm{MN}]$ est un terrain accidenté dans lequel Huw marche à $5\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. Les deux régions sont présentées dans le diagramme suivant.

la figure n'est pas à l'échelle



(a) Huw se déplace en ligne droite de H vers S. Calculez le temps qu'il faudra à Huw pour compléter ce trajet. Donnez votre réponse correcte à la minute près. [6]

(b) Huw réalise que le temps de son trajet pourrait être réduit en empruntant un itinéraire moins direct. Il définit alors un point P sur $[\mathrm{MN}]$ situé $x\,\mathrm{km}$ à l'est de M. Huw décide de courir de H à P et ensuite marcher de P à S. Soit $T(x)$ le temps, en heures, nécessaire à Huw pour effectuer le trajet selon cet itinéraire.

(i) Montrez que $T(x) = \dfrac{\sqrt{0{,}4^2 + x^2} + 3\sqrt{0{,}8^2 + (4-x)^2}}{15}$. [3]

(ii) Esquissez la représentation graphique de $y = T(x)$. [2]

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 1)

(iii) À partir de là, déterminez la valeur de x pour laquelle $T(x)$ est minimal. [1]

(iv) Trouvez de combien de temps le trajet de Huw est réduit lorsqu'il emprunte cet itinéraire optimal, par rapport à un trajet en ligne droite de H à S. Donnez votre réponse correcte à la minute près. [2]

(c) (i) Déterminez une expression pour la dérivée $T'(x)$. [3]

(ii) À partir de là, montrez que $T(x)$ est minimal lorsque

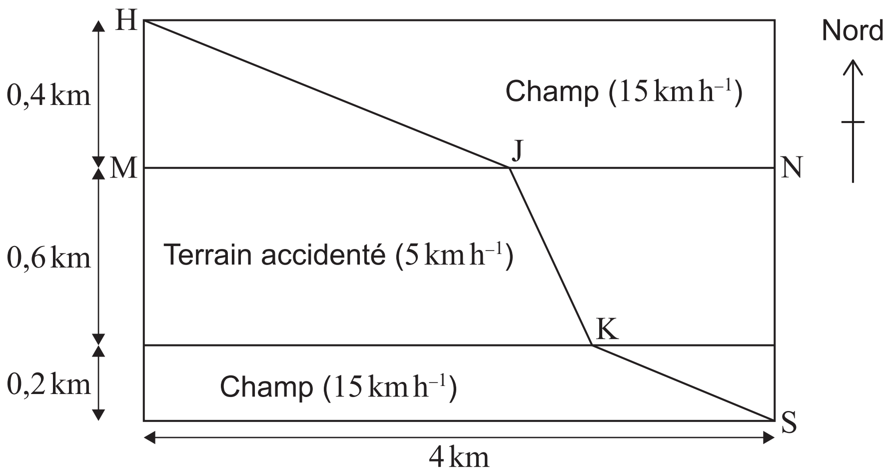
$$\frac{x}{\sqrt{0{,}16+x^2}} = \frac{3(4-x)}{\sqrt{0{,}64+(4-x)^2}}.$$ [1]

(iii) Pour l'itinéraire optimal, vérifiez que l'équation de la partie (c)(ii) satisfait le résultat suivant :

$$\frac{\cos \mathrm{H\hat{P}M}}{\cos \mathrm{S\hat{P}N}} = \frac{\text{vitesse sur le champ}}{\text{vitesse sur le terrain accidenté}}.$$ [2]

(d) Le propriétaire du terrain accidenté convertit le quart sud en un champ dans lequel Huw peut courir à $15\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. Le diagramme suivant montre l'itinéraire optimal, HJKS, pour cette nouvelle situation. On sait que [HJ] est parallèle à [KS].

la figure n'est pas à l'échelle



En utilisant un résultat similaire à celui donné dans la partie (c)(iii), au point J, déterminez MJ. [6]

2. [Note maximale : 29]

Cette question porte sur l'analyse de plusieurs ensembles de données regroupant des notes d'examen, en utilisant une variété de procédures courantes ainsi qu'un nouveau test statistique.

Une classe de huit élèves passe deux examens, un en français et un en allemand.

Les notes de ces examens sont données dans le **tableau 1**.

Tableau 1

Élève	Note en français	Note en allemand
S_1	42	39
S_2	65	66
S_3	82	71
S_4	50	53
S_5	48	32
S_6	73	59
S_7	34	40
S_8	59	56

La note maximale dans les deux examens est la même.

Vous pouvez supposer que ces données constituent un échantillon aléatoire provenant d'une distribution normale bivariée dont la moyenne est μ_F pour l'examen de français, μ_G pour l'examen d'allemand et le coefficient de corrélation de Pearson est ρ.

Avant la tenue des examens, le directeur du département de langues, Pierre, cherche à savoir s'il y aurait des preuves d'une différence significative entre μ_F et μ_G. Il décide d'analyser les données en utilisant un test t bilatéral pour des échantillons appariés au niveau de signification de 5%.

(a) Expliquez brièvement :

(i) pourquoi il choisit d'utiliser un test t et pas un test z; [1]

(ii) pourquoi il choisit d'utiliser un test bilatéral et pas un test unilatéral. [1]

(b) (i) Indiquez des hypothèses appropriées pour le test t. [1]

(ii) Trouvez la valeur p pour ce test. [2]

(iii) La valeur p est une probabilité. Indiquez l'événement auquel correspond cette probabilité. [1]

(iv) Indiquez, en donnant une raison, la conclusion à laquelle Pierre devrait arriver. [2]

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 2)

(c) Pierre pense que les élèves qui obtiennent de bons résultats à un examen de langue ont tendance à obtenir de bons résultats à l'autre examen de langue. Il décide donc d'effectuer un test au niveau de signification de 5% pour vérifier s'il existe une corrélation positive entre les notes obtenues à l'examen de français et les notes obtenues à l'examen d'allemand.

(i) Indiquez des hypothèses appropriées en termes de ρ. [1]

(ii) Faites un test approprié et indiquez la valeur p. Indiquez, dans le contexte, la conclusion à laquelle Pierre devrait arriver, en donnant une raison qui justifie votre réponse. [4]

(d) Il y a en fait deux autres élèves dans cette classe, Paul et Sue. Paul a passé l'examen de français, mais il n'a pas pu passer l'examen d'allemand. Sue a passé l'examen d'allemand, mais elle n'a pas pu passer l'examen de français.

(i) Paul a obtenu une note de 58 à l'examen de français. Utilisez les données dans le **tableau 1** pour prédire la note que Paul aurait obtenue à son examen d'allemand. [3]

(ii) Sur la base de sa note à l'examen d'allemand, la note de Sue à l'examen de français a été estimée à 71. Trouvez la note qu'elle a obtenue à l'examen d'allemand. [2]

Six élèves passent des examens de mathématiques et d'histoire et leurs notes sont présentées dans le **tableau 2**. La directrice adjointe, Angela, décide d'enquêter pour savoir s'il existe une association entre les notes obtenues dans ces deux matières.

Tableau 2

Élève	**Note en mathématiques (x)**	**Note en histoire (y)**
P_1	53	41
P_2	76	70
P_3	50	62
P_4	65	47
P_5	61	66
P_6	84	50

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 2)

Angela est informée que la note maximale dans chaque matière est 100.

Angela pense que les données ne sont peut-être pas distribuées normalement, elle recherche donc des tests appropriés disponibles, qui ne supposent pas que les données sont normalement distribuées. Elle décide d'utiliser un test basé sur une statistique appelée τ de Kendall.

Considérez n observations bivariées $(x_i \,;\, y_i)$, $i = 1,\ 2,\ \ldots n$, telles qu'il n'y a pas de valeurs de x égales ni de valeurs de y égales. Toute paire d'observations bivariées distinctes $(x_i \,;\, y_i)$ et $(x_j \,;\, y_j)$ est dite concordante si $(x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0$ et discordante si $(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0$. Pour n observations bivariées, il y a $\dfrac{n(n-1)}{2}$ paires distinctes.

Le τ de Kendall est défini par $\dfrac{2(C-D)}{n(n-1)}$, où C et D désignent respectivement le nombre de paires concordantes et de paires discordantes.

(e) (i) Montrez que la valeur du τ de Kendall se situe toujours à l'intérieur de l'intervalle $[-1 \,;\, +1]$. [1]

(ii) Pour les élèves P_1 et P_2, montrez que leur paire est concordante. [1]

(iii) Montrez que la valeur du τ de Kendall pour les données en mathématiques et histoire est de $0{,}2$. [4]

(f) Angela décide d'utiliser cette statistique dans un test bilatéral au niveau de signification de $10\,\%$. La région critique pour son test est $|\tau| \geq 0{,}733$.

(i) Indiquez, avec des mots, son hypothèse nulle et son hypothèse alternative. [1]

(ii) Indiquez la conclusion à laquelle Angela devrait arriver. Donnez une raison justifiant votre réponse. [2]

Angela se rend compte que les notes en histoire étaient en fait sur 120. L'enseignante d'histoire suggère à Angela de mettre les notes d'histoire à l'échelle pour qu'elles soient sur 100, puis de refaire les calculs pour trouver la valeur de τ.

(g) Indiquez, en donnant une raison, si vous êtes d'accord avec la suggestion de l'enseignante d'histoire. [2]